



# Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie-2010

Clasa a IX-a

## Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

| Nr. problemei | Soluție, rezolvare  | Punctaj |
|---------------|---|---------|
| 1.            | <p><b>a)</b></p> <p>Fie <math>S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2010 \Rightarrow a_1 + a_n = \frac{4020}{n}</math></p> <p><math>a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, n \geq 1 \Rightarrow a_n - a_1 = \frac{n-1}{3}</math></p> <p>Atunci <math>a_1 = \frac{2010}{n} - \frac{n-1}{6}; a_n = \frac{n-1}{6} + \frac{2010}{n};</math></p> | 2p      |
|               | <p>Dar <math>a_1, a_n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in D_{2010}</math> și <math>n = 6 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 67.</math></p> <p>Așadar este <math>a_1 = 19; a_{67} = 41.</math></p>   | 3p      |
|               | <p><b>b).</b> Așadar, <math>a_1 = 19; a_{67} = 41.</math> Dacă rația este <math>\frac{1}{3}</math>, atunci termenii care sunt naturale sunt: <math>a_1 = 19; a_4 = 20; a_7 = 21; \dots; a_{67} = 41.</math> Numărul lor este 23.</p>  | 2p      |
| 2.            | Condiții: $x \notin \mathbb{Z} \cup (0,1)$  | 1p      |
|               | Dacă $x < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții ( $\frac{1}{\{x\}} > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} < 0$ );   | 2p      |
|               | <p>Dacă <math>x &gt; 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} &lt; \frac{1}{2} \\ [x] \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{[x]} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} &lt; 1, \text{ iar } \frac{1}{\{x\}} &gt; 1 (Fals) \Rightarrow</math></p> <p>ecuația nu are soluții.</p>                             | 2p      |
|               | <p>Dacă <math>x \in (1,2) \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in (1,2); x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin (1,2)</math></p> <p>Soluția ecuației este <math>x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.</math></p>  | 2p      |

|    |  |    |
|----|--|----|
| 3. | <p>a) Fie <math>x \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p>1. Dacă <math>x = 2 \cdot k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 4 \cdot k^2 \Rightarrow x^2 \in M_4</math>.</p> <p>2. Dacă <math>x = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 \Rightarrow</math><br/> <math>x^2 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1 \Rightarrow x^2 \in M_4 + 1</math>.</p> <p>Dacă <math>x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2, y^2 \in M_4</math> sau <math>M_4 + 1 \Rightarrow</math><br/> <math>x^2 + y^2 \in M_4</math> sau <math>M_4 + 1</math> sau <math>M_4 + 2</math>.</p> <p>În concluzie, <math>x^2 + y^2 \notin M_4 + 3</math>.</p> <p>Numărul <math>2011 = 502 \cdot 4 + 3 \in M_4 + 3 \Rightarrow 2011 \notin M</math>.</p> <p><math>2048 = (2^5)^2 + (2^5)^2 \in M</math>.</p> | 3p |
|    | <p>b)</p> <p>Fie <math>p, q \in M, p = x_1^2 + y_1^2, q = x_2^2 + y_2^2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p><math>p \cdot q = (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)^2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)^2 \in M</math>.</p>  | 2p |
|    | <p>c). Presupunem că <math>M'</math> conține pe <math>a \in \mathbb{N}^*, a &gt; 1</math>, atunci va conține pe <math>a^2, a^3, \dots, a^n, \dots</math>. Aceste elemente nu se repetă, deoarece dacă <math>a^i = a^j, i &lt; j</math>, ar rezulta că <math>a^{j-i} = 1 \Rightarrow a = 1</math> (<i>fals</i>).</p> <p>Deci mulțimea <math>M'</math> nu ar fi mulțime finită.</p> <p>În concluzie, mulțimea <math>M'</math> poate să conțină numai pe 0 sau 1.</p> <p>Așadar, <math>M' = \{0\}; M' = \{1\}; M' = \{0, 1\}</math>.</p>  | 2p |

|    |  |    |
|----|--|----|
| 4. | <p>a) Se știe că <math>\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow (\forall) O \in \text{planului, avem:}</math><br/> <math display="block">\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{k+1}, k \neq -1.</math> <p>Dacă <math>\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC}}{\alpha+1}; \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} + \alpha \cdot \overrightarrow{OA}}{\alpha+1}; \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB}}{\alpha+1}.</math> <p>Dacă <math>G</math> este centrul de greutate al triunghiului <math>\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})</math>, și dacă <math>G'</math> este centrul de greutate al triunghiului <math>\triangle MPQ</math>, atunci <math>\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})</math>.</p> <p>Deci</p> <math display="block">\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC}}{\alpha+1} + \frac{\overrightarrow{OC} + \alpha \cdot \overrightarrow{OA}}{\alpha+1} + \frac{\overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB}}{\alpha+1} \right) \Leftrightarrow</math> <math display="block">\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} + \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB}}{\alpha+1} \right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})</math> <p>În concluzie, <math>\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OG} \Leftrightarrow G = G'.</math></p> </p></p> | 3p |
|    | <p>b). Se aplică teorema lui Ceva: dreptele <math>AM, BP, CQ</math> sunt concurente dacă și numai dacă <math>\frac{BM}{MC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1.</math></p>   | 2p |
|    | <p>c). Din ipoteză, <math>m &gt; 0</math>, de rezultă că punctul <math>N \notin [BC]</math>. Se aplică teorema lui Menelaus în triunghiul <math>\triangle ABC</math> pentru punctele <math>N, S, Q</math> cu <math>NQ \cap (AC) = \{S\}</math>: <math>\frac{AS}{SC} \cdot \frac{NC}{NB} \cdot \frac{QB}{QA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AS}{SC} = \frac{NB}{NC} \cdot \frac{QA}{QB} = m \cdot \gamma</math>. Deci raportul căutat este <math>-m \cdot \gamma</math>, deoarece <math>S \in (AC)</math>.</p> <p><b>Notă.</b> Elevii care vor da răspunsul <math>m \cdot \gamma</math> nu vor fi depunctați.</p>  | 2p |